Definice 1 (konvergence v $\mathcal{D}'(\Omega)$). *Říkáme, že posloupnost $\{T_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konverguje v prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$ (nebo také konverguje slabě) k distribuci $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, pokud pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$, $n \to \infty$.*

Poznámky a příklady.

1. *je-li $f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{a\})$, $f' \in L^1_{\text{loc}}$ a existují $f(a\pm)$ plastní. Potom $(T_f)' = (f(a+) - f(a-))\delta_a + T_{f'}$.*

2. *Pro $f(x) = \log|x|$ platí*

$$(T_f)' = T_{v.p.\frac{1}{x}}, \quad \langle (T_f)'', \varphi\rangle = -p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}$$

.

3. *pro $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ platí $T_{f_n} \to \delta$.*

4. *pro $T_{\frac{1}{x\pm i0}} := \lim\limits_{\varepsilon\to 0\pm} T_{\frac{1}{x\pm i\varepsilon}}$ platí*

$$T_{\frac{1}{x\pm i0}} = T_{v.p.\frac{1}{x}} \mp i\pi\delta.$$

0.1 Temperované distribuce, Fourierova transformace, konvoluce

Definice 2 (prostor $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ a Fourieova transformace na něm). *Prostor $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definujeme jako prostor všech lineárních zobrazení (funkcionálů) $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, která jsou spojitá v následujícím smyslu: pokud $\varphi_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}{\to} \varphi$, potom $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$, $n \to \infty$. Funkcioánály patřící do $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ nazýváme temperované distribuce na $\mathbb{R}^d$.*

Je-li $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ potom definujeme Fourierovu transformaci T (zn. $\mathcal{F}(T)$) jako $\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle$ a inverzní Fourierovu transformaci T (zn. $\mathcal{F}^{-1}(T)$) jako $\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle$.

Poznámky a příklady.

1. *Platí $L^1(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Například pro $f(x) = e^{x^2}$ platí $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \setminus \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

2. *Na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ můžeme definovat operace posunutí, škálování, derivace a násobení funkcí stejně jako na $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, jedině u posledního se musíme omazit pouze na funkce mající nejvýše polynomiální růst v nekonečnu.*

3. *Pro $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ opět platí $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(T)) = T$.*

4. *Pro $f_a(x) = e^{i2\pi ax}$ platí $\mathcal{F}(T_{f_a}) = \delta_a$.*

5. *$\mathcal{F}(\cos(2\pi ax)) = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})$, $a \in \mathbb{R}$.*

6. *$\mathcal{F}(e^{i\lambda|x|^2}) = \left(\dfrac{i\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{i\pi^2}{\lambda}|\xi|^2}$, $\lambda \neq 0$.*

Definice 3 (konvoluce prvků $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$). *Konvoluci $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definujeme jako $\langle \varphi * T, \phi\rangle = \langle T, R\varphi(x) * \phi\rangle$, kde $R\varphi(x) = \varphi(-x)$.*

Poznámky a příklady. *1.* $\varphi * \delta = T_\varphi$,

2. $\mathcal{F}(\varphi * T) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(T)$, $\mathcal{F}^{-1}(\varphi * T) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\mathcal{F}^{-1}(T)$.